

Über die Verteilung der Approximationszahlen von Integraloperatoren in Sobolev–Besov–Räumen

HANS TRIEBEL

Communicated by RALPH PHILLIPS

In der Arbeit werden die in [14] begonnenen Untersuchungen über die Verteilung der Approximationszahlen von Integraloperatoren G ,

$$(Gf)(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy,$$

fortgesetzt. Als entscheidendes Hilfsmittel werden hierbei Interpolationstheoreme für Sobolev–Besov–Räume mit Gewichtsfunktionen verwendet [15].

Abschnitt 1 hat vorbereitenden Charakter. Am Beispiel von Folgenräumen wird das später verwendete Prinzip erläutert. Es zeigt sich, daß die in den nachfolgenden Abschnitten behandelten Fälle auf den hier untersuchten zurückgeführt werden können. Im Abschnitt 2 wird ein beschränktes Gebiet Ω mit glattem Rand betrachtet, $\Omega \subset R_n$. Liegt $G(x, y)$ im Raum $W_2^r \hat{\otimes} W_2^s$, $-\infty < r, s < \infty$, so zeigt sich, daß der Operator G zu $\gamma_{\kappa, 2}(W_2^r, W_2^s)$ mit $\kappa = 2n/2(r + s - \rho + \sigma) + n$ gehört, $\rho \leq r, \sigma + s \geq 0$. Dabei ist $\gamma_{\kappa, 2}(W_2^r, W_2^s)$ die Gesamtheit der kompakten Operatoren, die W_2^r in W_2^s abbilden und für deren Approximationszahlen $s_i, i = 1, 2, \dots$, die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{2/\kappa-1} < \infty$$

gilt. Es ist $\gamma_p \supseteq \gamma_{\kappa, 2}$ für $p > \kappa$ [14], dabei sind γ_p die üblichen γ_p -Klassen [6]. Dieser Satz verallgemeinert Resultate von Krejn [6], S. 157, Paraska [8], Sobolevskij [11] und Ergebnisse aus der Arbeit [14]. In den Abschnitten 3 und 4 werden entsprechende Resultate für Sobolev–Besov–Räume mit Gewichtsfunktionen gewonnen. Als Beispiel wird folgendes Resultat genannt. $W_{2, q}^r(R_n)$ sei die Vervollständigung von $C_0^\infty(R_n)$ in der Norm

$$\left[\int_{R_n \times R_n} \sum_{|\alpha| = [r]} \frac{|\mathfrak{D}^\alpha u(x) - \mathfrak{D}^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2(r)}} dx dy + \int_{R_n} q^r(x) |u(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$