

# Unendliche Produkte von Kontraktionen

STEFAN HILDEBRANDT

**1. Die Summe von Unterräumen** Bezeichne  $H$  einen reellen oder komplexen Hilbertraum mit den Elementen  $x, y, z, \dots$ , dem Skalarprodukt  $(x, y)$  und der Norm  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ . Unter einem Unterraum  $M$  von  $H$  verstehen wir eine abgeschlossene lineare Teilmannigfaltigkeit von  $H$ . Den von einer Menge  $\{M_i\}_{i \in J}$  von Unterräumen  $M_i \subseteq H$  aufgespannten Unterraum bezeichnen wir mit  $\vee_{i \in J} M_i$ , und  $\bigcap_{i \in J} M_i$  steht für den Durchschnitt. Ferner gibt  $M^\perp = H \ominus M$  das Orthogonalkomplement von  $M$  an.

Betrachten wir zwei beliebige Unterräume  $M_1$  und  $M_2$  von  $H$ . Dann gilt bekanntlich (vgl. z.B. [7]) der folgende

**Satz 1.** Die Summe  $M_1 + M_2$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $M_1^\perp + M_2^\perp$  abgeschlossen ist.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man ein ähnlich einfaches Kriterium für die Abgeschlossenheit der Summe  $M_1 + M_2 + \dots + M_N$  von  $N$  Unterräumen  $M_1, \dots, M_N$  von  $H$  angeben kann. Die folgende naheliegende Verallgemeinerung des Satzes 1 ist falsch ab  $N \geq 3$ :  $M_1 + M_2 + \dots + M_N$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $M_1^\perp + \dots + M_N^\perp$  abgeschlossen ist.

Als *Beispiel* dienen drei Unterräume  $M_1 = \{0\}, M_2, M_3$ , für die  $M_2 + M_3 = M_1 + M_2 + M_3$  nicht abgeschlossen ist, während  $M_1^\perp = H$  und somit  $H = M_1^\perp + M_2^\perp + M_3^\perp$  abgeschlossen ist.

Dagegen gilt der

**Satz 2.** (Vgl. [5], S. 140).  $M_1^\perp + M_2^\perp + \dots + M_N^\perp$  ist abgeschlossen, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i)  $M_1 + M_2 + \dots + M_N$  ist abgeschlossen.

(ii) Aus  $x_1 + x_2 + \dots + x_N = 0$  für  $x_i \in M_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), folgt

$$x_i \in \bigcap_{j=1}^N M_j \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Nahezu trivial ist

**Satz 3.** (Vgl. [5], S. 141).  $M_1^\perp + \dots + M_N^\perp$  ist abgeschlossen, wenn einer der Räume  $M'_i = M_i \ominus (\bigcap_{k=1}^N M_k)$  endlichdimensional ist.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit von  $M_1 + \dots + M_N$  gibt folgender, in [6] bewiesener