

Une Classe d'Opérateurs Non Hypoelliptiques Analytiques

GUY METIVIER

I. Introduction.

Le travail présenté ici et qui contient les démonstrations des résultats annoncés en [11] se situe dans le cadre de l'étude de l'hypoellipticité analytique (en abrégé h.e.a.) d'une famille bien précise d'opérateurs (en gros, les sous-elliptiques avec perte d'une dérivée). Cette étude vient en partie du problème récemment très étudié de l'h.e.a. d'opérateurs liés au \square_b (voir [16] et sa bibliographie, voir aussi [17]). Par ailleurs la classe d'opérateurs considérés est en quelque sorte celle qui vient "juste après" les elliptiques et le problème de l'hypoellipticité analytique s'y pose de façon naturelle.

L'idée qui est sous-jacente à ce travail et qui est due à F. Trèves [17] est de relier l'h.e.a. de l'opérateur P et des propriétés symplectiques de la variété caractéristique Σ de P .

En effet, selon [17], si P est sous-elliptique avec perte d'une dérivée et si son symbole principal, réel, p s'annule exactement à l'ordre 2 sur la variété symplectique Σ , alors P est h.e.a. Le résultat de D. S. Tartakoff [16] va dans le même sens puisque l'une de ses hypothèses signifie précisément que Σ est symplectique. A l'inverse, les exemples d'opérateurs non h.e.a. de la forme $D_t^2 + \mathcal{A}(x, D_x)$ (M. S. Baouendi-C. Goulaouic [1], voir aussi [10] pour des généralisations) ont une variété caractéristique (pour peu que ce soit une variété) non symplectique.

Notons toutefois, comme cela l'est suggéré dans [17], qu'il ne faut sans doute pas vouloir relier trop rigidelement la condition " Σ symplectique" à l'hypoellipticité analytique de P : que dire si Σ est non symplectique en un point isolé? Que dire de l'opérateur $D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + x_1^2 D_y^2 + (D_{x_3} - x_2^2 D_y)^2$? (Cf. aussi les Remarques 2.5. et 2.11.)

Dans ce travail on s'est limité pour une première approche aux opérateurs différentiels, d'ordre 2, à symbole principal réel positif, mais on peut raisonnablement espérer que les résultats s'étendront, sous les mêmes hypothèses, à un cadre plus général.

On démontrera la non hypoellipticité analytique de P sous trois hypothèses qui sont en gros les suivantes: