

Localisation des Espaces de Besov Homogènes

ABDELLAH YOUSSEFI

Introduction. L'un des problèmes, qui remontent aux travaux de B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden et W. S. Young [5], a été de caractériser (en dimension quelconque) les multiplicateurs de Fourier de $L^2(|x|^{2s} dx)$ ($s \in \mathbf{R}$). En travaillant dans cette direction, E. Sawyer [7] a remarqué que le problème revient à déterminer les multiplicateurs de $\dot{X}_2^{s,2}$. L'espace $\dot{X}_2^{s,2}$ contient un et un seul élément de chaque classe de l'espace $\dot{B}_2^{s,2}$ (espace de Besov homogène); d'ailleurs G. Bourdaud [4] a récemment défini, de façon précise, les espaces $\dot{X}_p^{s,q}$ nommés "réalisation usuelle" de $\dot{B}_p^{s,q}$.

Dans son article, E. Sawyer a montré le théorème suivant :

Théorème 1. Soit $s > 0$ vérifiant $s - \frac{n}{2} \in \mathbf{R}^+/\mathbf{N}$ et $\frac{s-n}{2} \in \mathbf{R}^+/\mathbf{N}$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) m est un multiplicateur de $\dot{X}_2^{s,2}$,
- (2) $\sup_{t>0} \|\eta \cdot d_t m\|_{B_2^{s,2}} < +\infty$; où $B_p^{s,q}$ désigne l'espace de Besov inhomogène, $(d_t m)(x) = m(\frac{x}{t})$ et η une fonction de classe C^∞ , portée par $\frac{1}{4} \leq |x| \leq 4$ et égale à 1 sur $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$.

Comme il arrive en pareil cas, E. Sawyer n'a pas fourni une preuve simple à son théorème. Les techniques utilisées apparaissent compliquées pour pouvoir étendre le théorème aux espaces $\dot{X}_p^{s,p}$.

Un problème, adjacent au précédent, était de caractériser les multiplicateurs des espaces inhomogènes. Pour ce faire, le cas des espaces de Sobolev a conduit Strichartz [9] à commencer par étudier la localisation de ces espaces. Peu après, J. Peetre [6] a amorcé l'étude des espaces de Besov.

A partir de là, G. Bourdaud [2] a donné une forme générale à la localisation, dans le cadre des espaces de Banach de distributions : on part d'une fonction $h \in D(\mathbf{R}^n)$ vérifiant :