

*Approximation par
Fonctions Holomorphes dans
les Espaces L^p , $\text{Lip } \alpha$ et BMO*

ANDRÉ BOIVIN ET JOAN VERDERA

ABSTRACT. Vitushkin-type theorems on the approximation by holomorphic functions in the complex plane are established. More precisely, let F be a closed (or measurable) subset of the complex plane and let B be any one of the following spaces of functions defined on F : $L^p(F)$, $1 < p < \infty$, $\text{Lip}_\alpha(F)$, $0 < \alpha < 1$, $\text{BMO}(F)$, or $C^m(F)$. Let A_B be the set of those functions in B which are holomorphic on the interior of F . We characterize, in terms of appropriate capacities, those sets F for which every function in A_B can be approximated, in the B -norm on F , by functions holomorphic in a neighbourhood of F . Our argument is along the lines of the original approximation scheme of A. G. Vitushkin and generalizes, to unbounded sets F , results of many authors, including T. Bagby, P. Lindberg, A. G. O'Farrell and J. Verdera. It should be noted that similar results for the uniform norm have been known for some time.

0. Introduction. Soit Ω un sous-ensemble ouvert du plan complexe \mathbb{C} et F un sous-ensemble relativement fermé de Ω . Notons respectivement par $C(F)$, $\text{Hol}(F)$, et $\text{Mer}(F)$ l'ensemble des fonctions continues sur F , holomorphes sur F et méromorphes sur \mathbb{C} sans pôles sur F . De plus soit $A(F)$ l'ensemble des fonctions continues sur F et holomorphes sur l'intérieur F^0 de F , et $M(F)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(F)$ qui peuvent être approchées uniformément sur F par des fonctions dans $\text{Mer}(F)$. Nous avons toujours l'inclusion $M(F) \subseteq A(F)$.

Nous voudrions décrire les ensembles F pour lesquels nous obtenons l'égalité $M(F) = A(F)$. Si pour un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$, $\alpha(E)$ dénote la capacité analytique continue de E (voir Section 1.2), nous avons alors.