

Remarque sur un Problème de Cauchy Semi-Lineaire a Données Discontinues en un Point

H. BAHOURI & B. DEHMAN

Introduction. Dans ce travail nous étudions l'existence et la régularité des solutions du problème de Cauchy suivant :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square u = F(t, x, u(t, x)) \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{array} \right.$$

où $(t, x) \in \Omega$ voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^{n+1} , F est une fonction réelle C^∞ de ses arguments, $\varphi_0 \in \mathcal{L} \cap H_{(0)}^{1,m}$ et $\varphi_1 \in L^\infty \cap H_{(0)}^{0,m}$. (\mathcal{L} représente l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur Ω et les espaces $H_{(0)}^{s,k}(\Omega)$ sont définis par les champs de vecteurs nuls à l'origine (voir aussi [4])).

Ce type de problème a été étudié par de nombreux auteurs dont nous citerons essentiellement A. Majda ([6], [7]), M. Beals [2], M. Beals et G. Metivier [3], J. M. Bony ([4], [5]), R. Melrose et N. Ritter [8] et J. Rauch et M. Reed [10].

Plus récemment, en prenant des données initiales présentant des singularités conormales par rapport à une hypersurface Γ de $\{t = 0\}$, G. Metivier a établi l'existence locale d'une solution réelle dans $\mathcal{L} \cap H_{(\Sigma)}^{0,m}$, Σ étant l'ensemble caractéristique issue de Γ (cf. [9]). Nous démontrons que le résultat établi dans cet article n'est plus vrai dans notre cadre. Plus précisément, nous montrons que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour $n = 2p + 1$ ($p > 1$), il existe une fonction $\varphi_1 \in L^\infty \cap H_{(0)}^{0,m}$ pour laquelle la solution de (1.1) avec $F = 0$ et $\varphi_0 = 0$ n'est pas lipschitz (cf. Th. 2.1).

De plus, il s'avère que la situation est différente lorsque φ_0 (resp. φ_1) est homogène d'ordre 1 (resp. 0). En effet, sous ces hypothèses, nous établissons au théorème 2.2 que le problème (1.1) possède dans le cas linéaire, une solution $u \in$