

Existence Globale de Solutions Régulières Pour l'Équation des Ondes Non Linéaire Amortie sur le Groupe de Heisenberg

CLAUDE ZUILY

ABSTRACT. For the quasi-linear wave equation on the Heisenberg group, we prove the propagation with finite speed and the global existence of a smooth solution for the Cauchy problem with small data when the equation is damped.

INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail au problème de Cauchy pour des équations d'ondes non linéaires sur des groupes qui contiennent le groupe de Heisenberg. La question que nous étudions est celle de l'existence de solutions en grand temps lorsque les données de Cauchy sont C^∞ à support compact et petites. Dans le cas de l'équation des ondes sur \mathbb{R}^{1+n} cette question a été très étudiée ces dernières années et des bornes inférieures précises du temps de vie des solutions ont été données. Il s'agit de travaux de S. Klainerman [3], etc.,..., L. Hörmander [1] (cf. [1] pour une bibliographie extensive).

Concernant l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg peu de résultats sont connus, même dans le cas linéaire. Citons l'étude de la solution élémentaire faite par A. Nachman [7] et les résultats de propagation des singularités obtenus par B. Lascar [4] et R. Melrose [6].

Le cadre dans lequel nous nous plaçons est le suivant. On considère un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie \mathcal{G} est nilpotente stratifiée de rang deux, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ où \mathcal{G}_1 est de dimension $2n$ et \mathcal{G}_2 de dimension $d \geq 1$. Si X_1, \dots, X_{2n} et Y_1, \dots, Y_d désignent des bases respectives de \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 , on a

$$[X_j, X_k] = \sum_{\ell=1}^d A_{jk}^\ell Y_\ell,$$

où les matrices $A^\ell = (A_{jk}^\ell)$ sont antisymétriques. On suppose ici qu'elles commutent entre elles.